ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1976

1ère INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA – *Les six questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très lisiblement leur numéro.*

1 /

1° On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} j^2 & 1-j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ j^2-j & j-j^2 & j & 0 \\ j^2-j & j-j^2 & j & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^3

Calculer les valeurs propres de A.

Diagonaliser A

2° Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur C, de dimension finie, tel que :

$f^3 = f_0 f_0 f$ soit l'identité de E.

Quelles sont les valeurs propres de f ?

Soit λ l'une d'elles, que peut-on dire des vecteurs $x + \lambda f^2(x) + \lambda^2 f(x)$ quand x est un vecteur quelconque de E ?

Diagonaliser f.

---

2 /

On considère le volume V, homogène de masse spécifique 1, limité par

$$z = 0 \ , \ z^2 = 2ax \ , \ x^2 + y^2 = ax$$

où $a > 0$

Calculer le moment d'inertie I par rapport à Oz et la masse M du volume V.

En posant $I = M R^2$, calculer le nombre positif R.

.../...

3 /

Soit $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$

1° Montrer que $I(a)$ est continue pour $a \geqslant 0$

2° Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} -\frac{2a}{x^2} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$$

est définie.

3° Trouver une relation entre $I(a)$ et $I'(a)$.
En déduire $I(a)$

On supposera que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

---

4 /

1° Établir la formule : $1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$ avec $0 \leqslant r < 1$

2° En déduire que l'on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{0 \sin\theta \, d\theta}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^2} = \frac{2\pi}{(1 - r^2)(1 + r)}$$

---

5 /

On considère l'intégrale définie, fonction de α : $J_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}$

dans laquelle n est un nombre entier positif ou nul et α un nombre supérieur à -1.

1° Calculer $J_0(0)$, $J_1(0)$, $J_0(\alpha)$ et $J_1(\alpha)$.

Étudier la continuité de $J_0(\alpha)$ et $J_1(\alpha)$ pour $\alpha = 0$.

Déduire du calcul de la dérivée de $x^n\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$ une relation de récurrence linéaire entre $J_{n-1}(\alpha)$, $J_n(\alpha)$ et $J_{n+1}(\alpha)$.

Calculer $J_n(0)$ et $J_n(1)$.

---

6 /

1° Étudier le rayon de convergence des séries de terme général $u_p = \frac{x^{2p}}{p!}$ et $v_p = \frac{2^{p-1} x^{2p-1}}{1.3.5. \ldots (2p-1)}$

2° Calculer la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$

3° Montrer que la somme $\sum_{p=1}^{+\infty} v_p$ est solution de l'équation différentielle (E) $y' - 2xy = 1$ dont on déterminera la solution générale. (Celle-ci contient une fonction définie par une intégrale).

En déduire $\sum_{p=1}^{+\infty} v_p$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail